



TITLE:

可飽和非線形格子中を走行する非線形局在励起の速度測定 (非線形波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

佐藤, 政行; 坂井, 正斗; 西崎, 茜; 宮坂, 風輝

CITATION:

佐藤, 政行 ...[et al]. 可飽和非線形格子中を走行する非線形局在励起の速度測定 (非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2020, 2153: 132-142

ISSUE DATE:

2020-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/255093>

RIGHT:

可飽和非線形格子中を走行する非線形局在励起の速度測定

金沢大学 自然科学研究科 佐藤政行、坂井正斗、西崎茜、宮坂風輝

Masayuki Sato, Masato Sakai, Akane Nishizaki, Kazaki Miyasaka

Graduate School of Natural Science and Technology, Kanazawa University

1. はじめに

非線形局在励起 (Intrinsic Localized mode, ILM) は非線形な格子に存在する局在励起の一種である。[1,2] 格子点 (サイト) あるいは格子点間 (ボンド) のどちらかで安定であり、移動は困難である。いろいろなシステムで実験が行われてきた。[2] 図 1. (左) にはマイクロエレクトロメカニカルシステム (Micro-electro mechanical system、MEMS) の一種のカンチレバーをアレイ状に並べた結合振動子系の例を示している。[3] 図 1 中央は、カンチレバーアレイのモデルを示す。このようなシステムは図 2 左曲線に示す分散関係 (線形のノーマルモード周波数を波数空間にプロットした) を持つ。

図 2 には、ソフト非線形性 (非線形の符号が負、振幅とともに共鳴周波数が下がる) の場合における非線形局在励起の 2 次元フーリエ変換 (FT) もグレイスケールで示している。格子中の局在励起は、線形状態の波を重ね合わせた波束として生成されるので、バンドの下側に接して作られる。FT 強度は $k=0$ 近傍が強く、その場所でバンドに近接している。図 2 右の矢印で示すように、直線状の状態は、近接点から離れるに従いバンドから遠くなり、それだけ共鳴周波数をシフトする必要がある。これは、非線形光学でいうところの振幅が小さいモードへの相互位相変調が、振幅が大きいモード自身に及ぼす自己位相変調より 2 倍大きいことと同じことが起きていると考ええると、理解できる。[4] すなわち近接点の大強度振幅は、近接点自身の周波数シフトより、弱強度の周辺部に大きな周波数シフトをもたらす。このように考えると、図 2 右に示すような、バンドに接する斜めの直線が、走行する非線形局在励起として存在していると考えられる。

実際、MEMS カンチレバーアレイでは図 1 右に示すように励起周波数を選べば固定境界ではあるが、連続走行状態が作れる。[5,6] 今回は、より理想に近い周期境界の作成が容易な電気回路[7]による格子を作成し、走行状態を作成し観測することを目指した。

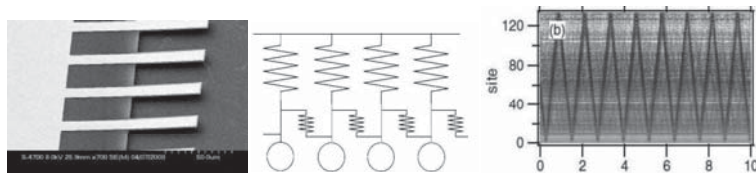


図 1. 左 代表的な MEMS カンチレバーアレイ。長さ $50\mu\text{m}$ 程度、 100kHz 程度の共鳴周波数をもつカンチレバーを並べた格子。[3]中央 その結合振動子モデル。右 カンチレバーアレイ試料で観測される走行する局在励起 (ILM)。素子の数は 130。固定端のため、試料内を往復している。[5] 励起周波数をモードの間に選んである。

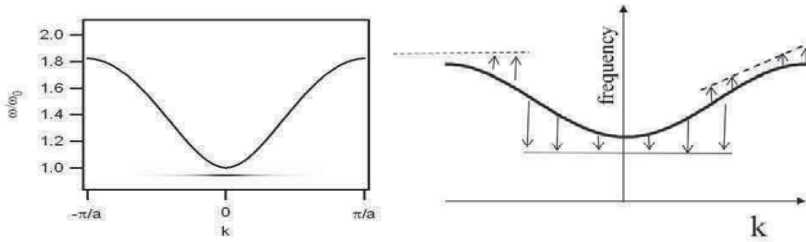


図 2. 左：静止非線形局在励起（ソフト非線形の場合）を 2 次元 FT して得られた強度を波数空間に表示し、線形の分散関係（曲線）に重ねた。静止局在励起は一つの周波数からなる波束で、水平な直線上に強度がある。右：各種の非線形局在励起とバンドとの関係。非線形局在励起は、バンド状態（波）から作られる波束であるので波数空間ではバンドに接して生成される。非線形性の正負（ハードかソフトか）により、静止局在はバンドの上下に生成される。一定の速度で走行する局在励起は傾いた直線となり、やはりバンド近傍に接して作られる。図の斜め線はハード非線形の場合。ソフトの場合はバンドの底近傍で近接する。

2. 非線形電気回路

図 3(a)・(b)に使用した電気回路のユニットセルを示す。どちらも MOS-FET (IRFU120) のゲートキャパシターを非線形コンデンサーに用いている。これとコイル L_1 で共振器を組み、非線形振動子としている。容量特性を図 4 に示す。バイアス電圧に加え、微小交流電圧を加えて測定しており、微分容量に相当する。バイアス電圧が上がるにつれて、ある電圧までは容量が大きくなる。図から、共振回路には振動振幅が大きくなるにつれ、共鳴周波数が減少するソフトな非線形性（非線形性が負）の特性がある。また、振動振幅がさらに大きくなり、ある値を超えると容量が増えなくなる、可飽和(saturable)の特性があることがわかる。(b)では、MOS-FET を反並行に接続し、対称性を良くしている。図 3(c)には、線形の分散特性と示している。非線形局在励起は、このバンド（周波数帯）の下側に生成される。

可飽和非線形性を用いた非線形局在励起には、振幅の調整により格子ピニング効果の指標であるパイエルス・ナバロ (PN) ポテンシャルを減少させることができると期待されている。[8,9] 励起周波数が下がり、線形共鳴の周波数との周波数差が大きくなると、振幅が大きくなる。また、非線形性が増す。非線形性が飽和してしまうと、励起周波数に共鳴し続けるために局在幅を増やす。この時、局在状態全体で非線形性が増し、周波数差を埋められる。局在幅が一つ増え、例えば奇数幅から偶数幅に変化するとき、サイトセンター (Sievers-Takeno) からバンドセンター(Page)へ形状が変わる。(偶数から奇数では逆に対称性が変わる。) この遷移をもたらす時にはどちらの対称性の安定性も同等で、PN ポテンシャルが小さくなり、移動しやすくなると期待される。

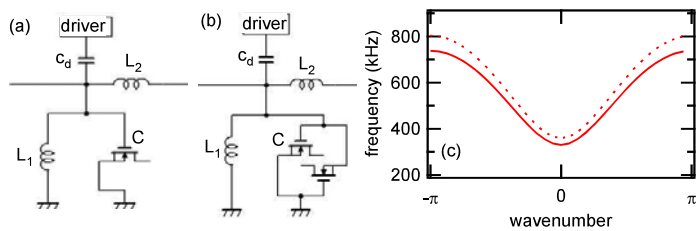


図 3. (a)電気回路による振動子格子。MOS・FET のゲートキャパシターを非線形コンデンサーとし、 $L_1(500\mu\text{H})$ と非線形振動子を形成している。 $L_2(500\mu\text{H})$ は隣との結合。 $C_d(70\text{pF})$ はドライバーと結合するため。(b)では非線形コンデンサーを2つ使い、対称性をよくしている。(c)分散関係(線形のノーマルモード周波数の波数依存性)。実線(a)、点線(b)の回路でバンドがほぼ同じようになるようにコイルの値を($L_1=200\mu\text{H}$ 、 $L_2=200\mu\text{H}$)選んだ。

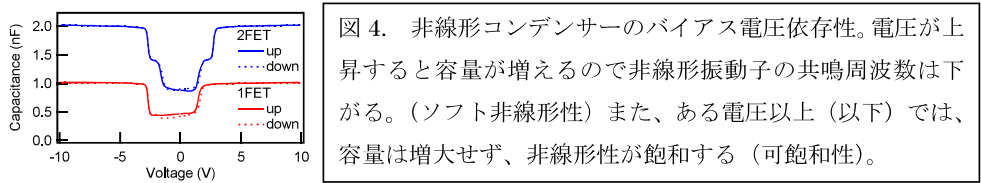


図 4. 非線形コンデンサーのバイアス電圧依存性。電圧が上昇すると容量が増えるので非線形振動子の共鳴周波数は下がる。(ソフト非線形性) また、ある電圧以上(以下)では、容量は増大せず、非線形性が飽和する(可飽和性)。

3. 測定装置

測定装置の概略を図 5 に示す。ユニットセルをリング状に 32 個接続した格子を用いた。走行状態を作成するには進行波励起を行うのが理想であるので、3 2 チャンネルの進行波励起ドライバーを作成した。励起波数と励起周波数を選択できる格子サイズが 32 なので、可能な励起波数も 3 2 個であり、隣り合う波数は $\Delta k = 2\pi / 32$ だけ離れている。走行状態の観測には各点の電圧を 32 チャンネルのオシロスコープ(自作)で測定した。また、速度測定用にスペクトラムアナライザーを用いている。オシロスコープの記録長に煩わされずに精密に速度(スペクトル分布)が測定できる。

図 6 に実際の実験時の走行状態の振幅の周波数依存性を示す。単一の励起・減衰系のソフト非線形振動子の応答とよく似た周波数依存性が測定されている。実験では、簡単に変更できるパラメーターはドライバー周波数である。ここではドライバー周波数依存性を中心に実験が行われた。図 7 には観測された走行状態の一例を示す。左図は 32 チャンネルのオシロスコープの電圧をマップで表示している。これを 2 次元 FT を行い、波数空間にその強度をマップすると図 7 右のようになる。励起波数 $k = \pi / 8$ はバンドの底から数えて 2 番目のモードである。期待されたように線形の分散関係に近接する直線構造が得られている。[10] 実験で、このような図が得られたのはおそらくこれが初めてだろうと思われる。

図 8 には速度測定の原理が示されている。左にはある格子点での電圧を時間の関数としてプロットした。局在励起が通過するたびに大きな電圧変動が記録される。右図はその時

のスペクトルである。キャリア周波数 240 kHz の左右に、時間軸で周期的に表れる変調に対応したサイドバンドが記録される。(図は上側サイドバンドしか表示していない。) 最初のサイドバンドのピークは、キャリア周波数と周回周波数だけずれている。周回周波数に格子数をかけると速度になるので、キャリアとの周波数差に格子のサイズをかけて、速度スペクトルを得る。また、スペクトルの鋭さからは、安定走行か、不安定状態かを区別することができる。

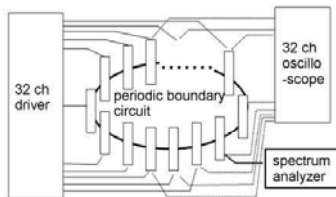


図 5. 周期境界をなすように、リング状に連結された非線形振動子 (32 個) を、32 チャンネルの進行波励起ドライバー (位相の異なる発振器群) で励起し、32 チャンネルのオシロスコープで観測する。速度はスペクトラムアナライザーで観測する。

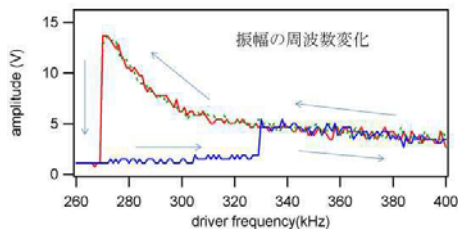


図 6. 振幅の周波数依存性。実験では、ドライバー周波数のみ、簡易に変えることができる。振幅の周波数依存性はこの図のように、ソフト非線形振動子のヒステリシスを伴う。

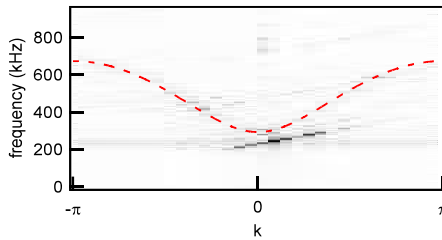
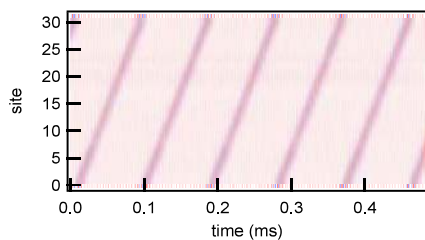


図 7 左: 走行する非線形局在励起の実空間での様子。右: その 2 次元フーリエ変換。点線は線形の分散関係。フーリエ強度をグレイスケールで表示してある。

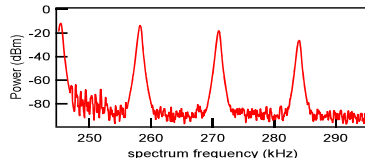
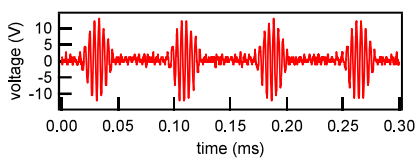


図 8. 速度測定の様子。左: ある一つの振動子に着目すると、局在励起が到達するたびに電圧が大きく振動する。右: スペクトラムアナライザーで測定したスペクトル。 240 kHz はキャリア周波数で、その次のピークは周回変調された信号である。これらの周波数差は、周回周波数であり、速度はそれに格子の長さ 32 をかけて得られる。

4. 走行する Lattice Spatial Mode (LSM) と ILM の観測

図 9 にシングルの MOS・キャパシターを用いた場合の結果をまとめてある。図 9(a)の縦軸はスペクトラムアナライザの周波数軸からキャリア周波数を引いて、格子数をかけた速度軸に直してある。横軸はドライバーの周波数（励起周波数）であり、図 6 のように周波数が低いほうが振幅が大きく、非線形性が大きい。この図は右端よりステップ状（50Hz、または 100Hz ステップ）に周波数を下げながら、スペクトルやオシロスコープ観測を行いながら得られた。これは、図 6 のようなヒステリシスがあるため、どうしても線形共鳴周波数（この場合は $k = \pi/8$ のノーマルモード周波数）から出発し、系と共鳴状態を維持しながら励起周波数を変化する方法でしか、目標の状態に移行することができないからである。

(b)・(j)の図は、オシロスコープで得られた実空間のパターンを示している。(b)・(c)の周波数域では、速度スペクトルは全般にグレイで、それに対応してランダムなパターンが現れている。(d)・(e)では等間隔なパターンが移動する様子が見られ、速度スペクトルは強いピークがみられる。一方(f)では間隔が等間隔ではなくなる。スペクトルピークは(e)の $1/3$ の速度に現れる。等間隔な 3 本縞の(e)に対し、(f)では不等間隔のため周回周波数に対応する位置にピークが新たに現れた。さらに周波数を下げると(g)では 2 本になり(h)では 1 本になる。(h)・(j)では 1 本の局在の実空間幅が広がっていく様子が見られる。

(d)・(e)の等間隔パターンは、静止 ILM が生成する直前に見られた、Burlakov が見つけた Lattice Spatial Mode (LSM、空間格子モード) [11]の移動型であろうと思われる。そのピーク本数は周波数が下がるにつれ 4 から 3 へと減じていくことも、静止型と似ている。[12] 一方、(h)・(j)で見られる一本の局在は走行する ILM であろう。実空間幅が周波数の低下とともに増大する様子は、静止型でも観測されており、可飽和非線形性の特徴である。振幅が大きくなり、非線形性が飽和してしまうと、ILM は共鳴状態を保つためにその幅を広げる。[8, 9] また、(f)・(h)の ILM の本数が減ずる様子も静止型と似ている。[12] これは、周波数減少とともに幅が広がり、限られた格子サイズ中で ILM 同士で相互作用がおきるため、と考えられる。最後の ILM 数の減少は過飽和非線形性ではない、通常の非線形性の場合、おそらく観察されないだろうと思われる。

図には示してはいないが、シングル ILM が観察される周波数から少しずつ周波数を上げてゆくと、図の逆順のように LSM が現れ、さらに高い周波数ではランダム的なパターンになる。しかしながら ILM から LSM への遷移は逆の場合と比べ高い周波数になる、すなわちヒステリシスが観測される。シングル ILM のみについて調べる場合、シングル ILM 状態から出発して周波数を上げる、下げの方が、大きなパラメーター領域（この場合周波数、それにより決まる振幅）について調べられる。

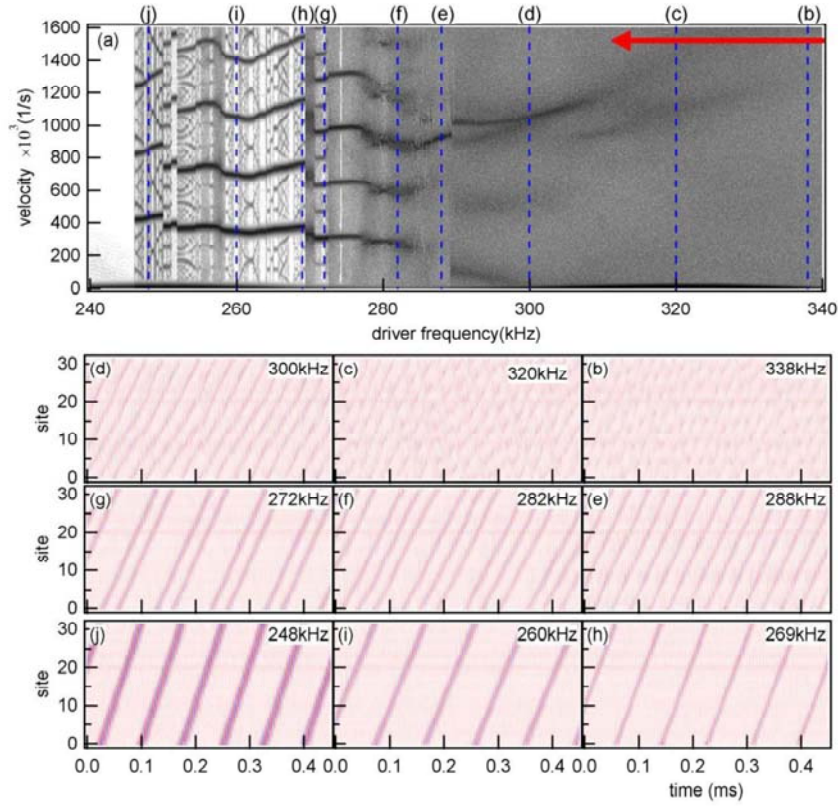


図 9. (a) 非対称コンデンサーを用いた回路で周波数を下げていった時の速度分布のドライバ周波数依存性。(b)・(j)それぞれの周波数での実空間での様子。

5. 走行する LSM の考察

LSM は励起・減衰系に見られる。減衰の大きな格子系では小さな間隔で生じる。減衰の小さな系でも、無振動から一様振動でシミュレーションを開始する場合、しばしば ILM 出現の前の非線形性が弱い段階に現れる。LSM の生成は以下のように説明できる。

図 10 左上の点線は線形状態のバンドで、3 2 個の点からなる。白丸は励起波数と励起周波数で決まる励起点でこの場合は $k=\pi/8$ である。励起モードは非線形性のため共鳴周波数が下がりドライバに共鳴励起されている。このとき、未だ大きな振幅を持っていない残りのバンドモードの周波数は+印のように周波数が下がる。(光学でいうところの相互変調効果の方が、自己位相変調より大きいため。[4] 非線形振動では、相互周波数シフトの方が自己周波数シフトより大きいと言うべきか。) 図のような場合、白丸より前後に 5 つ隣のモードとの間で、4 波混合が可能となり、これら 2 点が非線形励起される。このときの実空間のパターンを左下に示す。5 ピークの LSM が生成される。このように LSM の生成は、基本となる励起点の波と前後等間隔の非線形励起された複数の波からなる干渉効果による

パターン形成である。

LSM ピークの変化と、最終的な ILM 形成は以下のように説明できる。図 10 右のように、少しずつ励起点周波数（3 つの丸の中央）が下がるときを考える。非線形シフトしたバンドも一緒に下がるが、それほど下らない。（これは既に存在する LSM により、相互周波数シフトの効果が小さくなるためであると考えられる。）その結果、4 波混合する左右の点との距離は小さくなる。実空間では波長が大きくなるので、ピーク数は減少する。さらに励起周波数が下がると、3 点は隣同士になり、この時 LSM ピークは一つになる。これは格子サイズと等しい大きさの局在とも考えられる。さらに非線形性が増大すると、隣だけでなく遠くの波数状態も励起され、モード形成に参加し直線的な ILM に移行する。その時、ILM 形成に参加していない自由度は ILM の生成する斜めの直線より上に残る。LSM から ILM への移行は、”波” 性から”孤立” 性ともいえる。LSM では形成に参加するモードの数は実際は 3 点以上でもよく、波数空間で..., $k_d - 6\Delta k$, $k_d - 3\Delta k$, k_d , $k_d + 3\Delta k$, $k_d + 6\Delta k$, ... のように隣同士のモードは参加していない。この例の場合、 $3\Delta k$ 間隔なので 3 ピークの LSM が生成する。（ここで Δk は格子サイズで決まるモード間隔 $\Delta k = 2\pi / N$ 。）ILM の場合は Δk 間隔でモードが存在する。局在長が格子サイズに等しいときが、1 ピーク LSM とシングル ILM の区分であると考えられる。局在長が格子より小さくなると、LSM ではなく孤立性を獲得して ILM になると考えられる。

バンドの $k = 0$ モードのみの励起に対する残りの周波数のシフトについては、通常は変調不安定性により調べることは難しい。特殊な場合には調べることができ、確かに相互周波数シフトの方が自己周波数シフトより大きいことがわかる。[13]

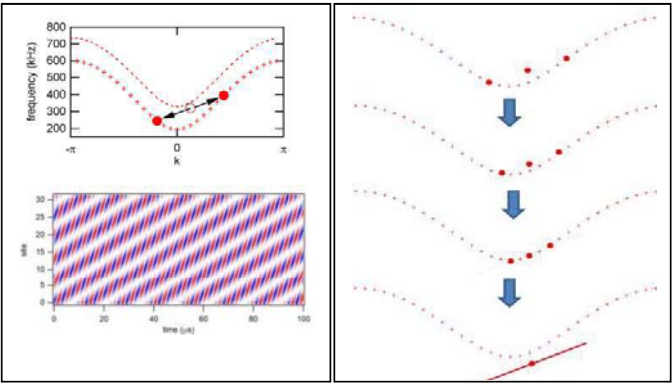


図 10. 左：走行 LSM の生成。点線は 32 個格子の場合の線形状態のバンド。十字は LSM 生成状態のシフトしたバンド。白丸は励起波数と励起周波数で決まる励起点。その状態から 4 波混合で 2 つの丸であらわされたモードが励起され、これにより移動する定在波に励起点の状態が加わったパターンができる。下に上の 3 つの丸で表示した波の重ね合わせで作られるパターンを示す。5 ピークの LSM ができている。右：LSM パターンがドライバ

一周波数の低下によりピーク数が減り、ILM に移行する様子。3 つの点のうち、中央がドライバの波数と周波数で決まる励起点。LSM から ILM への移行は、“波” 性から“孤立” 性ともいえる。

6. ILM の走行速度の周波数依存性

図 9 では励起周波数を下げるにつれて、シングルの ILM の速度が変化の様子が見られている。まず特徴的なのは段階的な変化である。速度の大きさは、図 7 からわかるように大体群速度に一致している。段階的に変化する理由は、以下のように説明できる。

図 11 に走行 ILM の 2 次元 FT による波数空間での分布を示す。複数の斜め線は、バンドの下での走行 ILM 本体 (図 11 (c) の直線)、その延長で波数が $\pm \pi$ をはみ出て第 2 ブリルアンゾーンへ伸びている信号が $\pm \pi$ の範囲に現れた部分 (1 点鎖線)、さらに走行 ILM の第 2 高調波 (波数、周波数ともに 2 倍) がみられる。注目すべきは、これら斜め線とバンド曲線が交差するところで大きな信号が観測されていることである。

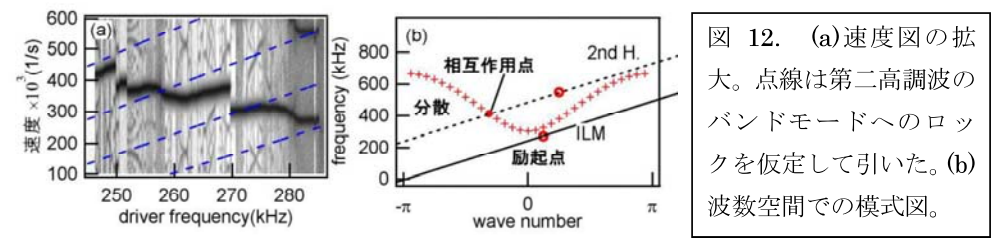
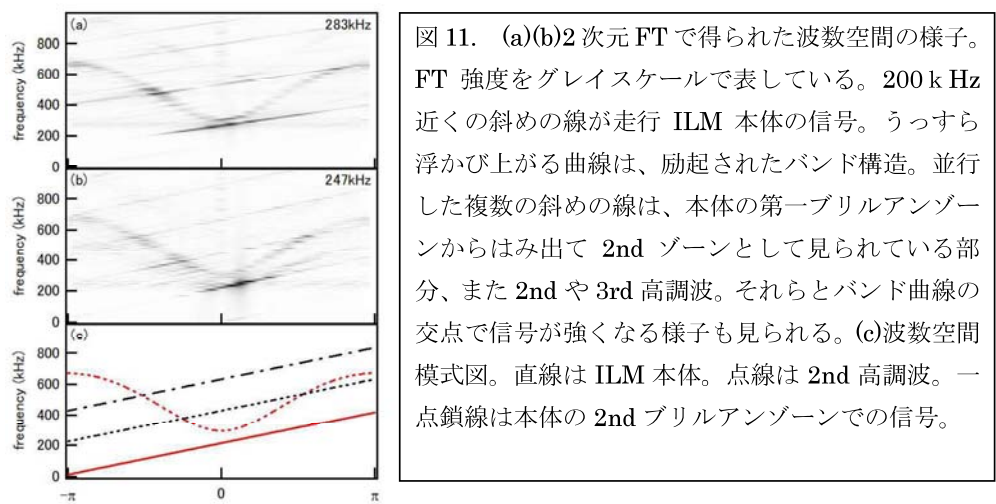
バンド内のモードは一つ一つが一種の共振器として働くことができる。力が働かない限り、減衰項があるのでそのような信号は減衰してしまい FT 強度は現れない。直線と交差する点のバンドモードは、その波数、その周波数で変位が振動強度を持つことを意味している。同じ波数、同じ周波数で、そこを励起できる非線形力が 0 でなければ、そのモードを励起する。(線形力を含む線形項だけで線形のノーマルモードは計算でき、波数空間にプロットされる。残りの部分、すなわち非線形力の 2 次元フーリエ変換を考え、線形項のフーリエ変換と波数、周波数が一致した点で、線形のノーマルモードが励起されると考える。) その場合、強度として FT 図に現れる。この場合、走行 ILM はバンドモードと相互作用し、格子全体に広がった波を励起していることになる。[10]

このような相互作用の証拠は、速度 (図 9) に表れる。拡大図を図 12 に示す。図 12(b) のように走行 ILM の第二高調波が相互作用点で示されるモードと相互作用し、直線が点にロックされている場合を考える。(現在のところ、直線状態と点であらわされるノーマルモードとの相互作用が反発的か、吸引力的かは不明である。しかしここでは、固定化すると考える。) 速度は、相互作用点と励起点の波数、周波数の 2 倍の点とを結ぶ直線の傾きで計算できる。

$$v_n = \frac{2\Omega - \omega_n}{2k_d - k_n}$$

ここで、 (k_n, ω_n) は n 番目のバンドモードの波数と角周波数、 Ω は励起角周波数、 k_d は励起波数である。適当に n を選ぶと、 Ω の関数として速度が得られる。それを実測に重ねたのが図 12(a) 点線である。ILM 走行状態のバンド周波数は線形状態からずれていることが予想されるが、周波数間隔はさほど変わらない。複数の点線は、隣り合ういくつかのバンドモードを仮定して引かれている。階段状の速度変化は、完全には点線に一致していない。

しかしその間隔と傾きはよく一致している。これは、走行 ILM の第二高調波とバンドモードの相互作用によることの証拠であると考えられる。走行 ILM の第二高調波信号がバンドと交差することが、走行 ILM 本体の形状にはさほど影響を与えず、しかしながら速度という重要な性質に影響を及ぼすことは驚きである。中心部から波数で遠く離れている、しかも第二高調波なので、本体から比べれば小さな信号であるにもかかわらず、速度のみ、影響を受けている。まるで波数空間内で一種の”てこ”のように動作しているかのようである。



7. 対称性のよい非線形素子の場合の ILM 速度

以上のことから、対称性の良い非線形コンデンサーを用いた回路では、第二高調波発生が少なく、したがって段階状の速度変化も生じないことが予想される。図 13 にその結果を示す。励起周波数のスキャンの開始点をシングル ILM から出発して、周波数で幅広くシングル ILM が観察されるようにした。周波数が高くなるとシングル ILM は同じように走行 LSM に移行する。そのピーク数の周波数変化も図 9 に似ている。しかし予想通りに、段階状の変化は見られない。

一方、大まかには周波数低下とともに速度が上昇しており、さらにその変化に微小なステップ状の変化が重なっている。速度上昇については、実空間での幅が増大することで波

数空間での幅が減少し速度が高周波側で遅くなっているらしいことがシミュレーションよりわかっている。横コイルの直流抵抗効果による減衰効果を考慮すると、高い波数成分を含む高周波の ILM の方が、高い波数側で減衰が大きく、そのため波数中心が励起波数より小さい側にずれる。その結果遅くなることで説明できる。細かいステップ状の速度変化は、3rd 高調波と ILM 本体である基本波の相互作用で生じることが示唆されている。図 13 では、速度分布図に細かい構造が見えるが、ピーク間になにもないところでは速度は周波数減少とともにわずかに減少するが、これは先ほどの 3rd 高調波と ILM 本体である基本波が互いにロックするからである。その間のグレイパターンがみられるところでは、ロックは完全でない。これは、3rd 高調波と ILM 基本波の相互作用が、あまり大きくないことを示唆する。

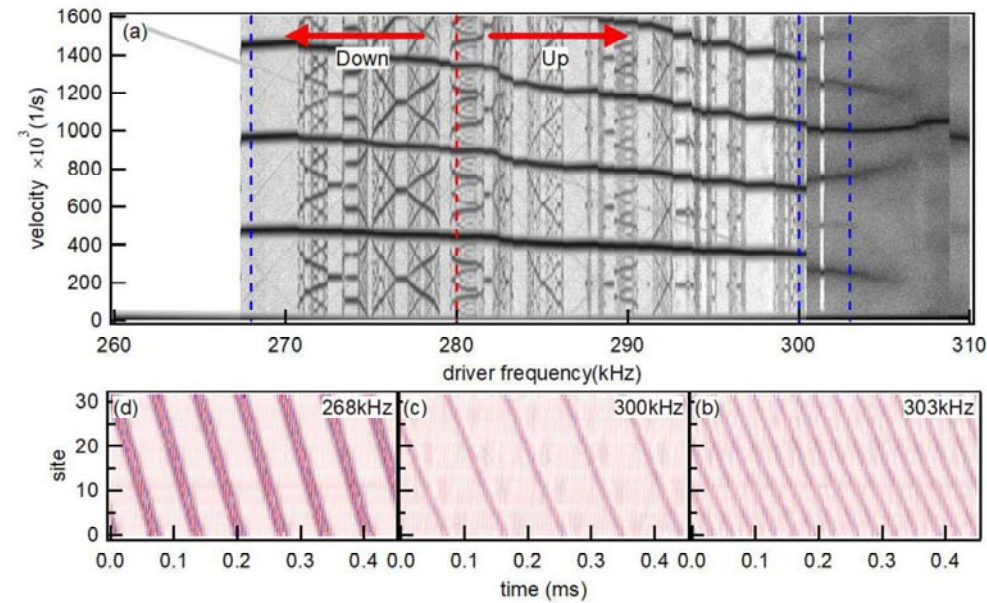


図 13. 対称性の良い非線形コンデンサーを用いた結果。(b)走行 LSM の発生、(c)シングル ILM の生成、(d)幅の増大と、対称性の悪い非線形コンデンサーの結果と同じ順で変化している。速度はおおよそ滑らかに変化し、大きな段階状の変化はない。

8. まとめ

電気回路を用いた非線形振動子を連ねて、周期境界を満たす格子を作成した。走行 ILM を励起するため、進行波励起ドライバーを作り、ILM 観測のため、多チャンネルオシロスコープを作成した。走行 ILM に至る様子を観測し、走行 LSM が作られる様子、そのピーク数が減少し走行 ILM に変化する様子を観測した。また、速度の変化は対称性の悪い、第 2 高調波が発生する素子を用いた回路では走行 ILM の第 2 高調波とバンドモードとの相互作用により、速度に階段状の変化が現れることをみつけた。一方、対称性の良い素子を用

いた回路では、大きな速度変化はみられていない。

謝辞

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

1. A.J. Sievers, S. Takeno, Intrinsic localized modes in anharmonic crystals, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 970-973.
2. Sergej Flach and Andrey V. Gorbach, Discrete breathers - Advances in theory and applications, *Physics Reports* **467** (2008) 1-116
3. M. Sato, B.E. Hubbard, A.J. Sievers, Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays, *Rev. Modern Phys.* **78** (2006) 137-157.
4. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, Boston, 1989
5. M. Sato and A.J. Sievers, Driven Localized Excitations in the Acoustic Spectrum of Small Nonlinear Macroscopic and Microscopic Lattices, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 214101 (pp.1-4)(2007).
6. M. Sato, N. Fujita, Y. Takao, S. Nishimura, W. Shi, Y. Sada, Y. Soga and A. J. Sievers, Precise velocity measurements for driven intrinsic localized modes in the acoustic spectrum of small cantilever arrays, *NOLTA*, **3**, pp87-102 (2012)
7. Fukushima K., Wadati M. and Narahara Y., *J. Phys. Soc. Jpn.*, **49** (1980) 1953.
8. L. Hadzievski, A. Maluckov, M. Stepic and D. Kip, *Phys. Rev. Lett.*, **93** (2004) 033901.
9. W. Shi, S. Shige, Y. Soga, M. Sato and A. J. Sievers, Intrinsic localized modes in a nonlinear electrical lattice with saturable nonlinearity, *EPL* **103**, 30006 pp.1-6 (2013)
10. M. Sato, T. Nakaguchi, T. Ishikawa, S. Shige, Y. Soga, Y. Doi, and A. J. Sievers, Supertransmission channel for an intrinsic localized mode in a one-dimensional nonlinear physical lattice, *Chaos* **25**, 103122, pp1-9 (2015)
11. V. M. Burlakov, *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1996) 3988.
12. S. Shige, K. Miyasaka, W. Shi, Y. Soga, M. Sato and A. J. Sievers, Experimentally observed evolution between dynamic patterns and intrinsic localized modes in a driven nonlinear electrical cyclic lattice, *EPL*, **121** (2018) 30003
13. M. Sato, L. Q. English, B. E. Hubbard and A. J. Sievers, Influence of sample shape on the production of intrinsic localized modes in an antiferromagnetic lattice, *J. Appl. Phys.* **91**, pp. 8676-8679 (2002).